

---

## Mécanique analytique, Série 4

---

*Assistants et tuteurs :*

jeanne.bourgeois@epfl.ch  
 luca-stefan.dugaiasu@epfl.ch  
 nathan.brunet@epfl.ch

lorenzo.fioroni@epfl.ch  
 filippo.ferrari@epfl.ch  
 jonas.daverio@epfl.ch

leo.goutte@epfl.ch  
 mathias.findrihan@epfl.ch  
 remi.thomas@epfl.ch

### Exercice 1 : Système binaire en deux dimensions

Considérons deux points matériels, de masses égales  $m$ , contraints à se déplacer dans un plan. Les deux points sont reliés par un ressort de constante de raideur  $k$  et de longueur à vide  $l_0$ . Les positions des deux points sont notées  $\vec{x}_1 = (x_1, y_1)$  et  $\vec{x}_2 = (x_2, y_2)$ .

- a) Écrire le Lagrangien du système en coordonnées cartésiennes.  
 b) Réécrire le Lagrangien après avoir effectué les changements de variables suivants :

$$\vec{x}_{cm} = \frac{\vec{x}_1 + \vec{x}_2}{2}, \quad \vec{d} = \frac{\vec{x}_1 - \vec{x}_2}{2}. \quad (1)$$

On introduit les coordonnées polaires pour le vecteur  $\vec{d}$  :

$$\vec{d} = (d \cos \phi, d \sin \phi), \quad (2)$$

et pour le centre de masse :

$$\vec{x}_{cm} = (x_{cm}, y_{cm}). \quad (3)$$

Ainsi, les nouvelles variables dynamiques du système sont  $x_{cm}$ ,  $y_{cm}$ ,  $d$  et  $\phi$ .  
 Pour simplifier les expressions, nous introduisons les notations suivantes :

$$M = 2m, \quad L_0 = \frac{l_0}{2}, \quad K = 4k. \quad (4)$$

c) Établir les équations d'Euler-Lagrange et montrer que la vitesse du centre de masse est une constante du mouvement.

d) Identifier deux autres grandeurs conservées et discuter leur interprétation physique.

e) Considérer maintenant l'approximation suivante :

$$\epsilon = \frac{d - L_0}{L_0} \ll 1, \quad (5)$$

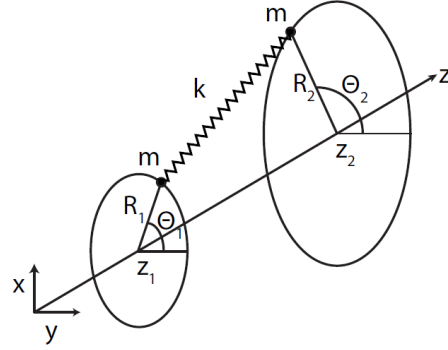
où  $L_0 = l_0/2$ .

- i) Expliquer, en termes physiques, à quoi correspond l'approximation précédente.  
 ii) Résoudre les équations du mouvement dans cette approximation.

- iii) Déterminer une condition sur  $K$ ,  $M$  et  $\dot{\phi}$  pour que l'approximation reste valable, et en donner une interprétation physique.

### Exercice 2 : Deux particules avec contraintes, interaction, et force externe

Considérez deux masses identiques  $m$ , contraintes à glisser sans frottement sur deux cercles coaxiaux parallèles de rayons respectifs  $R_1$  et  $R_2$ . Les deux cercles peuvent se déplacer sans frottement le long d'un axe (dirigé selon  $z$ ) passant par leurs centres. Les cercles demeurent en tout temps contenus dans le plan  $Oxy$ , orthogonal à l'axe  $z$ . Les deux masses sont reliées par un ressort de constante  $k$  et de longueur à vide nulle. Les masses des cercles sont négligeables, et l'on suppose l'absence de gravité.



- Écrire le Lagrangien du système en coordonnées cylindriques.
- En supposant que le cercle 1 se déplace suivant une loi horaire imposée  $z_1(t)$ , écrire les équations d'Euler-Lagrange.
- Trouver une grandeur conservée dans le cas décrit au point b).
- On considère maintenant le cas différent où la position moyenne des deux cercles

$$z_m = \frac{z_1 + z_2}{2} \quad (6)$$

suit une loi horaire imposée par l'extérieur  $z_m(t)$ . Quelles sont alors les grandeurs conservées ?

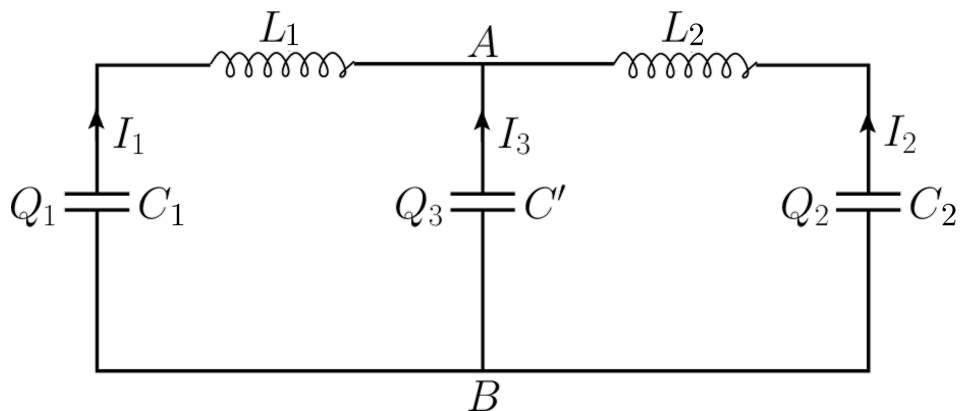
### Exercice 3 : Deux circuits LC couplés

On considère deux branches reliées à la masse. La branche gauche contient une inductance  $L_1$  en série avec un condensateur  $C_1$  ; la branche droite contient une inductance  $L_2$  en série avec un condensateur  $C_2$ . Les deux nœuds supérieurs des condensateurs sont couplés par un condensateur  $C'$  (voir schéma ci-dessous). On suppose des éléments idéaux (résistances nulles, aucun générateur). On choisit pour coordonnées généralisées les charges sur les condensateurs de branche  $q_1(t) = Q_1$  et  $q_2(t) = Q_2$ , avec conventions de signe cohérentes. La charge sur le condensateur de couplage est alors  $q_3(t) = Q_3 = -(q_1 + q_2)$ . On rappelle ici que le courant dans chaque branche est la dérivée temporelle de la charge sur le condensateur de cette branche :  $I_i = \dot{q}_i$ .

- Exprimez l'énergie magnétique (inductive)  $T$  en fonction des vitesses généralisées  $\dot{q}_1$  et  $\dot{q}_2$  et des inductances  $L_1, L_2$ .
- Exprimez l'énergie électrique (capacitive)  $V$  en fonction de  $q_1, q_2$  et des capacités  $C_1, C_2, C'$ .
- Écrivez le Lagrangien  $\mathcal{L} = T - V$ . Mettez  $\mathcal{L}$  sous la forme quadratique matricielle

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T M \dot{\mathbf{q}} - \frac{1}{2} \mathbf{q}^T K \mathbf{q}, \quad \mathbf{q} = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix},$$

et donnez explicitement les matrices  $M$  et  $K$ .



4. Déduisez les équations du mouvement couplées pour  $q_1$  et  $q_2$ .
5. Cherchez des solutions harmoniques de la forme  $q_i(t) = Q_i e^{i\omega t}$ , établissez la condition de non-trivialité (déterminant nul) et montrez que  $\omega^2$  vérifie un polynôme quadratique que vous préciserez.
6. Donnez l'expression fermée des fréquences modales  $\omega_{\pm}$ , c.-à-d. des solutions de l'équation trouvée ci-dessus.
7. Écrivez la solution générale  $\mathbf{q}(t)$  comme combinaison linéaire réelle des deux modes propres. Exprimez les courants  $I_1(t), I_2(t)$  correspondants.
8. Calculez les moments canoniques  $p_i = \partial\mathcal{L}/\partial\dot{q}_i$  et interprétez-les physiquement.
9. Déduisez la fonction hamiltonienne  $H = \sum_i p_i \dot{q}_i - \mathcal{L}$  et montrez que  $dH/dt = 0$ .
10. Spécialisez vos résultats au cas  $L_1 = L_2 = L$  et  $C_1 = C_2 = C$ . Introduisez les coordonnées normales  $q_{\pm} = \frac{1}{2}(q_1 \pm q_2)$  et montrez que le système se sépare en deux systèmes indépendants décrits par les coordonnées  $q_{\pm}$ .
11. Donnez les fréquences  $\omega_-$  et  $\omega_+$  en fonction de  $L, C, C'$  et commentez la limite de couplage faible ( $C/C' \ll 1$ ).

Vérifiez la cohérence dimensionnelle de toutes vos expressions pour  $\omega_{\pm}^2$ ,  $H$ , et  $p_i$ .